Veröffentlicht in

Risikomanagement im Unternehmen

Loseblattwerk 2001/2005

13. Aktualisierung 2005

“Rechnen mit Risiken III“

Kapitel 7-3.3, S. 49-77

KOGNOS Verlag, Augsburg
(www.kognos.de)

Ein Service von: FutureValue Group AG eMail: Kontakt@FutureValue.de Internet: www.FutureValue.de
RMCE RiskCon GmbH & Co. KG eMail: Info@RMCE.de Internet: www.RMCE.de

Rechnen mit Risiken III

Autor: Marco Wolfrum

Inhalt:

Problemstellung

Schätzung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zur Berücksichtigung von Risiken in einem Risikoaggregationsmodell müssen diese quantifiziert – also durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben – werden. Hierzu liegen in den Unternehmen oftmals genügend Vergangenheitsdaten vor, sodass aus diesen eine Schätzung über die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung getroffen werden kann. Im ersten Teil dieses Artikels wird skizziert, wie man scheinbar geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen finden kann. Die vorliegenden Daten werden hierbei als **Stichprobe aller möglichen Risikoauswirkungen** betrachtet.

Test auf Signifikanz

Es gilt aber zu überprüfen, ob die aus der Stichprobe (also den Vergangenheitsdaten) gewonnene Schätzung statistisch signifikant ist. In der Statistik heißen Unterschiede signifikant, wenn sie mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht durch Zufall zustande gekommen sind. Die Überprüfung der statistischen Signifikanz geschieht mithilfe einer Nullhypothese, die verworfen wird, wenn das zufällige Zustandekommen des Unterschiedes sehr unwahrscheinlich ist. Der Grad der zu überprüfenden Unwahrscheinlichkeit wird vorher festgelegt und mit α bezeichnet, beispielsweise $\alpha = 0.05$ für 5% **Irrtumswahrscheinlichkeit** (oder **Signifikanzniveau**).

Bei der Überprüfung, ob die vorliegenden Stichprobenausprägungen statistisch signifikant der abgeschätzten Verteilung folgen, bedient man sich so genannter statistischer Testverfahren.

Heuristiken zur Bestimmung von scheinbar geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Einschränkung infrage kommender Verteilungen

Leider gibt es kein Verfahren, um die einer Stichprobe zugrunde liegende Verteilung analytisch zu bestimmen. Grundsätzlich müsste man sämtliche Verteilungsarten auf ihre Signifikanz testen, um die am besten geeignete zu identifizieren. Aufgrund theoretischer Überlegungen insbesondere zu den Eigenschaften häufig vorkommender Verteilungen kann allerdings die Anzahl der infrage kommenden Verteilungen eingeschränkt werden. Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften verschiedener Verteilungen kurz skizziert. Anhand dieser kann entschieden werden, ob die jeweilige Verteilung zur Beschreibung des Risikos infrage kommt oder nicht.

Normalverteilung

Häufig findet die Normalverteilung bei der Quantifizierung von Risiken Anwendung. Grund hierfür ist der so genannte **zentrale Grenzwertsatz**. Dieser besagt, dass wenn ein Risiko sich zusammensetzt als Summe einer großen Anzahl voneinander unabhängiger Einzelrisiken, von denen jedes zur Summe nur einen unbedeutenden Beitrag liefert, so ist dieses Risiko annähernd normalverteilt. Es handelt sich hier um eine symmetrische Verteilung um den Erwartungswert, d. h., positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert sind gleich wahrscheinlich.

Log-Normalverteilung

Während die Normalverteilung mit der additiven Überlagerung einer großen Anzahl voneinander unabhängiger zufälliger Ereignisse in Zusammenhang gebracht werden kann, ist es bei der Log-Normalverteilung das multiplikative Zusammenwirken vieler zufälliger Einflüsse. Die Log-Normalverteilung wird häufig bei Lebensdaueranalysen von ökonomischen, technischen und biologischen Vorgängen angewendet. Die Log-Normalverteilung kann nur positive Werte annehmen, wobei die Wahrscheinlichkeit für extrem große Ausprägungen hoch ist.

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist wie die Log-Normalverteilung eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Sie ist eine typische Lebensdauerverteilung. So ist beispielsweise die Lebensdauer von elektronischen Geräten häufig annähernd exponentialverteilt. Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialverteilung ist die Gedächtnislosigkeit: Ist bekannt, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X den Wert x überschreitet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie x um mindestens t überschreitet, genauso groß wie die, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable (mit gleichem Parameter λ) den Wert t überschreitet.

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung findet bei **digitalen Risiken** Anwendung, wenn also genau zwei Ereignisse A und $\overline{A}$ (Risiko tritt ein oder tritt nicht ein) mit Wahrscheinlichkeit p bzw. 1-p auftreten können.

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung wird immer dann eingesetzt, wenn nur die Häufigkeit oder der Durchschnitt von Häufigkeiten für das Eintreten eines Risikos während einer bestimmten Zeitspanne bekannt ist. Unbekannt ist dann, wie häufig pro Zeiteinheit ein Ereignis nicht auftritt. Man kann beispielsweise nur angeben, wie häufig es während eines Gewitters geblitzt hat, und nicht, wie häufig es nicht geblitzt hat. Ein Anwendungsbeispiel ist das Auftreten von Schadensfällen bei einer Versicherung innerhalb eines Jahres. Die Poissonverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Dreiecksverteilung

Die Dreiecksverteilung erlaubt – auch für Anwender ohne tief gehende mathematische (statistische) Vorkenntnisse – eine quantitative Abschätzung eines Risikos. Es müssen lediglich drei Werte für das Risiko angegeben werden, der Minimalwert a, der wahrscheinlichste Wert b und der Maximalwert c. Dies bedeutet, dass von einem Anwender keine Abschätzung einer Wahrscheinlichkeit gefordert wird! Es können sowohl symmetrische als auch asymmetrische Risiken abgebildet werden. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass das Risiko eine bestimmte Bandbreite nicht überschreitet, also ein absolutes Minimum und Maximum für die Auswirkung des Risikos angegeben werden kann.

Gleichverteilung

Analog zur Dreiecksverteilung muss auch bei der Gleichverteilung nur eine Bandbreite für das Risiko angegeben werden. Innerhalb dieser Bandbreite sind alle Werte allerdings gleich wahrscheinlich.

Statistische Testverfahren

Nullhypothesen auf Signifikanz testen

Arten von Hypothesen

Im Rahmen von statistischen Testverfahren soll die Frage behandelt werden, wie man mithilfe von Zufallsstichproben testen kann, ob bestimmte Hypothesen über unbekannte Grundgesamtheiten richtig oder falsch sind. Man unterscheidet zwei Arten von Hypothesen:

- **Parameterhypothesen:** Hypothesen über unbekannte Parameter einer Grundgesamtheit (→ Parametertests)
- **Verteilungshypothesen:** Hypothesen über die unbekannte Verteilungsform einer Grundgesamtheit (→ Verteilungstest)

Fehler erster und zweiter Art

Mögliche Fehler bei Entscheidungen

Grundsätzlich wird zunächst die so genannte **Nullhypothese** (Ausgangshypothese) H_0 aufgestellt. Mit einer Nullhypothese korrespondiert die so genannte **Alternativhypothese** H_1. Diese besteht gerade aus der Annahme, dass die Nullhypothese nicht zutrifft. Man will nun entscheiden, ob man H_0 ablehnen kann oder nicht. Die Ablehnung von H_0 ist nun die richtige oder die falsche Entscheidung: Wenn der wahre Zustand „H_0 trifft nicht zu“ ist, so trifft man die richtige Entscheidung. Wenn hingegen der wahre Zustand „H_0 trifft zu“ ist, so trifft man die falsche Entscheidung. Man begeht dann einen so genannte **α-Fehler** (Fehler erster Art), dem die Wahrscheinlichkeit α (Signifikanzniveau, Irrtumswahrscheinlichkeit) zugeordnet ist. Auch die Nichtablehnung (Annahme) von H_0 ist entweder die richtige oder die falsche Entscheidung: Wenn der wahre Zustand „H_0 trifft zu“ ist, so trifft man die richtige Entscheidung. Wenn hingegen der wahre Zustand „H_0 trifft nicht zu“ ist, so trifft man die falsche Entscheidung. Man begeht dann einen so genannten **β-Fehler** (Fehler zweiter Art).

Testverfahren

Den Wert $1-\beta$ bezeichnet man auch als **Teststärke, Power** oder **Macht**. Er beschreibt die Aussagekraft eines statistischen Tests.

Entscheidung		Wahrer Zustand	
		H_0	H_1
Entscheidung für	H_1	α-Fehler	richtige Entscheidung
	H_0	richtige Entscheidung	β-Fehler

Vorgehensweise

Ziel ist es, das Testverfahren so zu konzipieren, dass die Wahrscheinlichkeiten für den α-Fehler und auch für den β-Fehler in vertretbaren Grenzen gehalten werden. Generell geht man dabei in folgenden Schritten vor:

- Formulierung einer Nullhypothese H_0 und ihrer Alternativhypothese H_1
- Berechnung einer Testgröße oder Teststatistik T aus der Stichprobe
- Bestimmung des kritischen Bereiches K zum Signifikanzniveau α, das vor Realisation der Stichprobe feststehen muss
- Treffen der Testentscheidung:
  - Liegt T innerhalb von K, so lehnt man H_0 zugunsten von H_1 ab.
  - Liegt T außerhalb von K, so wird H_0 beibehalten.

Geeignetes Signifikanzniveau

Das Signifikanzniveau α wird also vorgegeben. Je kleiner dieses Niveau gewählt wird, desto größer wird der kritische Bereich K und umso kleiner ist die Wahrscheinlichkeit des Ablehnens der Nullhypothese. Man will durch eine niedrige Irrtumswahrscheinlichkeit α gerade den Fehler erster Art der Ablehnung einer richtigen Nullhypothese fast völlig ausschließen. Damit erhöht sich gleichzeitig aber auch die Möglichkeit, einen Fehler zweiter Art zu begehen. Die Gefahr steigt somit ja an, dass eine falsche Nullhypothese trotzdem nicht abgelehnt wird. Allgemein gilt nämlich, dass mit sinkender Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art ansteigt. Die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler zweiter Art kann allerdings nicht immer berechnet werden. Daher ist es nicht empfehlenswert, das Signifikanzniveau α zu klein zu wählen. Die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Nullhypothese nicht abzulehnen, wird dann nämlich sehr groß.

Merke
Grundsätzlich kann ein Test eine Hypothese nicht beweisen, man kann aber eine Hypothese aufgrund eines Tests verwerfen!

Parametertests

Test von Hypothesen über Parameter von Verteilungen

Parametertests

Mithilfe von Parametertests sollen Hypothesen über unbekannte Parameter einer Grundgesamtheit (so genannte **Parameterhypothesen**) überprüft werden. Solche Parameter können beispielsweise ein Anteilswert, das arithmetische Mittel oder die Varianz sein.

Nullhypothese

Bei der Formulierung der Nullhypothese gibt es die Möglichkeit einer **einfachen Hypothese** (Punkthypothese, konkretisierte Hypothese). Hierbei bezieht sich die Behauptung über den Parameter auf genau einen einzigen Wert. Beispielsweise wird die Hypothese aufgestellt, dass der Ausschussanteil an einer Lieferung genau 2 % beträgt.

Im Gegensatz dazu beziehen sich **zusammengesetzte Hypothesen** (Bereichshypothese, nicht konkretisierte Hypothese) auf Bereiche für den untersuchten Parameter. Beispiel hierfür ist die Hypothese, dass der Ausschussanteil an einer Lieferung höchstens 2 % beträgt. Bei zusammengesetzten Hypothesen werden auch noch einseitige Fragestellungen und zweiseitige Fragestellungen unterschieden, die durch einseitige bzw. zweiseitige Tests überprüft werden. Bei einseitigen Fragestellungen wird genau ein Bereich für den Parameter angegeben, also beispielsweise die Hypothese über einen Ausschussanteil von höchstens 2 %. Demgegenüber setzen sich zweiseitige Tests aus zwei Bereichen zusammen.

Beispiel hierfür ist eine Hypothese, dass der Ausschussanteil ungleich 2 % ist, also kleiner als 2 % oder größer als 2 %.

Alternativhypothese

Auch bei der Aufstellung der Alternativhypothese sind wiederum die Möglichkeiten von einfachen oder zusammengesetzten Alternativhypothesen denkbar. Normalerweise wird man die Alternativhypothese so formulieren, dass der Wertebereich des Parameters durch die Nullhypothese und die Alternativhypothese durch zwei disjunkte Mengen vollständig abgedeckt ist. Dies muss aber nicht zwingend der Fall sein.

Kenntnis der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung

Voraussetzung für Parametertest

Voraussetzung für einen Parametertest ist die Kenntnis über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die ein Risiko beschreibt. Ein oder mehrere Parameter dieser Verteilung sind aber unbestimmt. Intention eines Parametertests ist, die Zuverlässigkeit einer Parameterschätzung durch eine Irrtumswahrscheinlichkeit zu bewerten.

Bestimmung einer Testvariablen

Wie bereits erwähnt sind die ersten Schritte hierbei das Aufstellen einer Nullhypothese und einer Alternativhypothese sowie die Festlegung eines Signifikanzniveaus α. Für die Durchführung des Parametertests wird dann aus der Stichprobe – die beispielsweise in der Vergangenheit durch ein bestimmtes Risiko aufgetretene Schäden umfasst – eine geeignete Testvariable T bestimmt, welche die gleiche Verteilungsfunktion besitzt wie die Zufallsvariable X bzw. die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$: $T = g(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Bestimmung eines kritischen Bereiches

Anhand des Signifikanzniveaus α und der Kenntnis der Verteilungsfunktion für T wird für T ein Intervall mit $a \leq T \leq b$ derart ermittelt, dass die Testvariable T mit einer Wahrscheinlichkeit von $\gamma = 1 - \alpha$ in diesem Intervall enthalten ist. Es gilt also:

$$\boxed{P\,(a \leq T \leq b) = \gamma = 1 - \alpha}$$

Diese Berechnung erfolgt auf der Basis der Nullhypothese H_0. Aus der vorgegebenen Stichprobe $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ wird der experimentelle Wert t für den Parameter berechnet, indem nacheinander die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ als einmalige Stichprobenwerte für die Variablen $X_1, X_2, ... X_n$ in $T = g\,(X_1, X_2, ..., X_n)$ eingesetzt werden:

$$\boxed{t = g\,(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

Die empirische Größe t wird als Prüf- oder Testwert bezeichnet. Damit kann die Nullhypothese beurteilt werden. Fällt t in den Bereich $a \leq T \leq b$, so wird die Hypothese akzeptiert. Andernfalls wird die Alternativhypothese akzeptiert.

Beispiel: Neukundengewinnung

Dieses allgemeine Vorgehen soll an dem einfachen Beispiel einer Neukundengewinnung anhand einer Mailingaktion veranschaulicht werden. Beobachtet wird das Ereignis A „Neukunde wird gewonnen". Getestet wird die Nullhypothese, ob die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis 0,10 beträgt:

$$\boxed{H_0\!: p(A) = 0{,}1}$$

Das Signifikanzniveau α wird zu 5 % festgelegt.

Zur Überprüfung werden die Daten einer Mailingaktion überprüft, bei der von n = 1000 potenzielle Neukunden angeschrieben wurden.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{i-te potenzielle Kunde wurde gewonnen} \\ 0, & \text{i-te potenzielle Kunde wurde nicht gewonnen} \end{cases}$$

Erwartet wird unter Annahme der Nullhypothese somit, dass genau 100-mal das Ereignis A eintritt, also bei den 1000 angeschriebenen potenziellen Neukunden genau 100 gewonnen werden konnten.

Aus der Stichprobe (den 1000 angeschriebenen potenziellen Kunden) wird als Testgröße T die Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses A ermittelt.

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wird angenommen, dass die potenziellen Kunden unabhängig voneinander entscheiden, kann hier von einem Bernoulli-Experiment ausgegangen werden. Das Auftreten des Ereignisses A kann somit durch eine Binominalverteilung mit Parametern n und p beschrieben werden. Diese kann man durch eine Normalverteilung mit

$$\mu = np = 100$$

und

$$\sigma = \sqrt{np\,(1-p)} = \sqrt{90} \approx 9{,}5$$

approximieren.

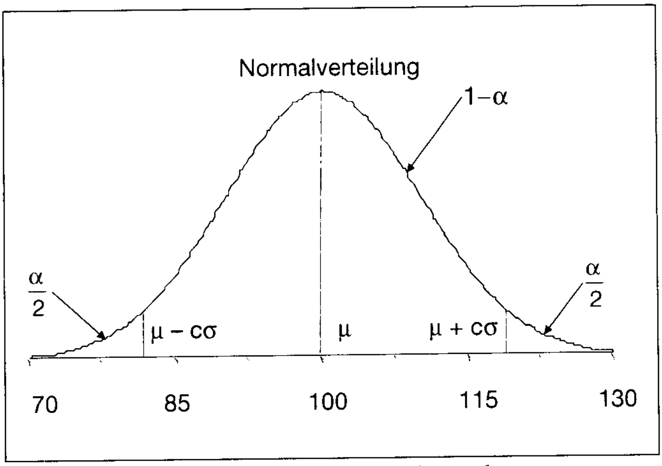

Abb. 1: Annahme- und Ablehnungsbereiche

Ermittelt werden muss also der Annahmenbereich [a; b], innerhalb dessen T liegen muss, damit H_0 nicht verworfen wird. Gesucht ist somit ein symmetrischer Bereich um den Erwartungswert, innerhalb dessen $(1 - \alpha)$ der Gesamtfläche der Normalverteilung liegen. Hierzu ist das $\frac{\alpha}{2}$-Quantil der Normalverteilung zu bestimmen. Dies kann ermittelt werden aus dem $\frac{\alpha}{2}$-Quantil der Standardnormalverteilung. Bezeichnet man dieses mit c, ergibt sich:

$$\boxed{a = \mu - c\sigma}$$

mit

$$\boxed{\Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

c kann dabei aus einer Tabelle zur Standardnormalverteilung abgelesen werden. In unserem Beispiel mit $\alpha = 5\ \%$ ergibt sich

$c \approx 1{,}96$ und somit $a \approx 100 - 1{,}96 \cdot 9{,}5 \approx 81{,}4$

Analog berechnet sich:

$b \approx 100 + 1{,}96 \cdot 9{,}5 \approx 115{,}6$

Ist bei 1000 angeschriebenen potenziellen Kunden die Anzahl T der gewonnenen Neukunden außerhalb des Annahmebereichs [81,4; 115,6], so lehnt man die Nullhypothese p = 0,1 auf dem Signifikanzniveau von 5 % ab.

Übersicht Parametertests

Folgende Tabelle zeigt eine Übersicht über verschiedene Parametertests.

H_0	Voraussetzung	Testgröße	Verteilung
$\mu = \mu_0$	bekannte Varianz σ; Normalverteilung oder n > 30	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	Standardnormalverteilung
$\mu = \mu_0$	unbekannte Varianz σ; Normalverteilung	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	Student-t-Verteilung mit n – 1 Freiheitsgraden
$\theta = \theta_0$	$n \cdot \theta_0 \cdot (1 - \theta_0) \geq 9$	$z = \dfrac{p - \theta_0}{\sqrt{\dfrac{\theta_0\,(1 - \theta_0)}{n}}}$	Standardnormalverteilung
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	Normalverteilung	$\chi^2 = (n-1)\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$	χ^2-Verteilung mit n – 1 Freiheitsgraden

H_0	Voraussetzung	Testgröße	Verteilung
$\mu_1 = \mu_2$	bekannte Varianzen σ_1, σ_2; Normalverteilungen oder $n_1 > 30$ und $n_2 > 30$	$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	Standardnormalverteilung
$\mu_1 = \mu_2$	unbekannte Varianzen σ_1, σ_2 und $\sigma_1 \neq \sigma_2$; Normalverteilungen oder $n_1 > 30$ und $n_2 > 30$	$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	Standardnormalverteilung
$\mu_1 = \mu_2$	unbekannte Varianzen σ_1, σ_2 und $\sigma_1 = \sigma_2$; Normalverteilungen oder $n_1 > 30$ und $n_2 > 30$	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$ mit $s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	Student-t-Verteilung mit $n_1 + n_2 - 1$ Freiheitsgraden
$\theta_1 = \theta_2$	$n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) \geq 9$ $n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \geq 9$	$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} p(1 - p)}}$ mit $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$	Standardnormalverteilung
$\sigma_1^2 = \sigma_0^2$	Normalverteilungen	$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	F-Verteilung mit $\upsilon_1 = n_1 - 1$ und $\upsilon_2 = n_2 - 1$

Verteilungstests

Hypothesentests

Anpassungstest

Bei der Prüfung einer Verteilungshypothese untersucht man, ob die in einer Stichprobe beobachtete Verteilung eines Merkmals (Zufallsgröße) X mit der für die unbekannte Verteilung der Grundgesamtheit gemachten Annahme in Widerspruch steht oder nicht. Basierend auf in der Vergangenheit durch ein bestimmtes Risiko aufgetretene Schäden wird also beispielsweise geprüft, ob dieses Risiko (bzw. die dadurch verursachten Schäden) durch eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden kann. Da hier die Güte der Anpassung einer theoretischen Verteilung an eine empirische Verteilung überprüft wird, spricht man auch von einem so genannten Anpassungstest. Die Nullhypothese lautet hier immer, dass die Grundgesamtheit einer bestimmten Verteilung $F_0(x)$ gehorcht:

H_0: X hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_0(x)$.

Weit verbreitete Verfahren für Verteilungstests sind der χ^2-Anpassungstest und der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest. Auf diese beiden wird im Folgenden näher eingegangen.

χ^2-Anpassungstest

Chi-Quadrat-Anpassungstest

Mit dem χ^2-Anpassungstest (Chi-Quadrat-Anpassungstest) untersucht man Verteilungseigenschaften einer statistischen Grundgesamtheit. Liegt ein stetiges Merkmal oder ein diskretes Merkmal mit sehr vielen Merkmalsausprägungen vor, wird die Merkmalsachse zunächst in k Klassen unterteilt.

Bestimmung der Testgröße χ^2

Die Zahl der Beobachtungen in einer Klasse entspricht der beobachteten Häufigkeit h_i^0. Anhand der theoretischen

Verteilung $F_0(x)$ werden dann die erwarteten absoluten Klassenhäufigkeiten h_i^e berechnet und mit den beobachteten absoluten Klassenhäufigkeiten h_i^0 verglichen. Nun wird die so genannte Testgröße χ^2 berechnet.

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i^0 - h_i^e)^2}{h_i^e}}$$

Diese gehorcht bei ausreichend großen h_i^e näherungsweise einer χ^2-Verteilung mit $n = k - 1$ Freiheitsgraden[1].

Differenzenbildung bei Testgröße

An der Differenzenbildung bei der Testgröße ist zu erkennen, dass die Hypothese wahr sein muss, wenn der Unterschied zwischen beobachteter und erwarteter Häufigkeit klein ist. Also wird H_0 bei einem hohen Testgrößenwert abgelehnt, der **Ablehnungsbereich** für H_0 liegt rechts. Bei einem Signifikanzniveau α wird H_0 abgelehnt, wenn $\chi^2 > \chi^2 (1 - \alpha; k - 1)$, dem $(1 - \alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $k - 1$ Freiheitsgraden ist. Der kritische Bereich K zur Ablehnung der Nullhypothese besteht also aus dem Intervall von $\chi^2 (1 - \alpha; k - 1)$ bis unendlich. $\chi^2 (1 - \alpha; k - 1)$ wird als (obere) **Annahmegrenze** bezeichnet.

Im Allgemeinen gibt man bei der Verteilungshypothese die Parameter der Verteilung an. Kann man diese nicht angeben, müssen sie aus der Stichprobe geschätzt werden. Hier geht bei der χ^2-Verteilung pro geschätzten Parameter ein Frei-

---

1 Damit die Prüfgröße als annähernd χ^2-verteilt betrachtet werden kann, sollte jede erwartete Häufigkeit mindestens fünf betragen. Zumindest sollte nur für nicht mehr als 20 % der erwarteten Häufigkeiten gelten, dass diese kleiner als fünf sind, und für keine erwartete Häufigkeit, dass sie kleiner als eins ist. Sind sie zu klein, sollten gegebenenfalls mehrere Klassen zusammengefasst werden.

heitsgrad verloren. Sie hat also k – m – 1 Freiheitsgrade mit m als Zahl der geschätzten Parameter.

Beispiel für χ^2-Anpassungstest

Anhand eines Beispiels soll die Vorgehensweise bei einem χ^2-Anpassungstest verdeutlicht werden. Hierzu wird auf die bereits aus Rechnen mit Risiken I bekannte **Zeitreihe des Umsatzwachstums** zurückgegriffen werden. In folgender Tabelle sind die Abweichungen des Umsatzwachstums vom beobachteten Mittelwert des Umsatzwachstums zu finden.

Umsatzwachstum in der Vergangenheit										
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz		–0,51%	0,43%	0,35%	–0,19%	0,21%	–0,31%	0,08%	–0,83%	0,80%
Periode	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
Umsatz	1,49%	–1,74%	0,55%	–0,29%	0,03%	–0,03%	0,94%	–1,17%	–0,53%	0,72%
Periode	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Umsatz	–0,32%	0,24%	–0,13%	0,40%	–0,81%	0,27%	0,19%	0,12%	0,06%	–0,01%

Es liegen somit 29 beobachtete Werte vor.

Untersucht werden soll nun die Nullhypothese H_0, dass die Abweichungen vom erwarteten Umsatzwachstum normalverteilt sind. Das Signifikanzniveau wird auf 5% festgelegt. Die Parameter der Normalverteilung – der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ – sind dabei aus den beobachteten Werten zu schätzen.

Es ergibt sich $\mu = 0{,}00\%$ und $\sigma = 0{,}65\%$.

Als Nächstes müssen **Klassen** gebildet werden[2] **und** damit die beobachteten und **die erwarteten absoluten Häufigkeiten** innerhalb der Grenzen bestimmt werden:

2 Die Grenzen der Klassen müssen dabei genau einer der beiden angrenzenden Intervalle zugeordnet werden. Es soll nun die obere Grenze zu der betrachteten Klasse zugehörig sein.

Klasse	Grenze		absolute Häufigkeit	
	untere	obere	beobachtet	erwartet
1	– unendlich	–0,53%	5	5,97
2	–0,53%	–0,21%	4	4,82
3	–0,21%	0,11%	7	5,65
4	0,11%	0,43%	8	5,21
5	0,43%	– unendlich	5	7,35

Mit dieser Klasseneinteilung sind die geforderten Eigenschaften erfüllt. Keine erwartete absolute Häufigkeit ist kleiner als eins und lediglich eine von fünf (und damit genau die geforderten maximal 20 %) ist kleiner als fünf.

Die erwarteten absoluten Häufigkeiten in einer Klasse – definiert durch ein Intervall]u; o] – ergeben sich dabei durch $F_{\mu,\sigma}(o) - F_{\mu,\sigma}(u)$, wobei $F_{\mu,\sigma}(x)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ repräsentiert.

Die **Testgröße** berechnet sich somit also zu

$$\chi^2 = (5 - 5{,}97)^2 / 5{,}97 + (4 - 4{,}82)^2 / 4{,}82 + (7 - 5{,}65)^2 / 5{,}65 + (8 - 5{,}21)^2 / 5{,}21 + (5 - 7{,}35)^2 / 7{,}35 = 2{,}87$$

Es wurden fünf Klassen gebildet und aus den Beobachtungswerten zwei Verteilungsparameter geschätzt. Somit ergibt sich die **Zahl der Freiheitsgrade** für die χ^2-Verteilung zu

$$\boxed{n = 5 - 2 - 1 = 2}$$

Die Schranke für den χ^2-Anpassungstest ergibt sich somit zu

$$\boxed{\chi^2\,(1 - \alpha;\, n) = \chi^2\,(95\%;\, 2) = 5{,}99}$$

Damit liegt die Testgröße χ^2 aber nicht im kritischen Bereich K zur Ablehnung der Nullhypothese. Es kann also aufgrund der vorliegenden Daten die Nullhypothese mit einem Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden.

Wie oben bereits ausgeführt, heißt das nicht, dass die Daten der untersuchten Verteilung folgen. Es kann durchaus andere Verteilungen geben, die bei dem gleichen Signifikanzniveau ebenfalls nicht verworfen werden können.

Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest

Der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest ist auch schon bei kleinen Stichprobenumfängen anwendbar. Die Testgröße wird nicht ausgehend von den einzelnen absoluten Häufigkeiten gebildet, sondern ausgehend von der Verteilungsfunktion:

$F^0\,(x)$: beobachtete Summenhäufigkeitsfunktion der Stichprobe

$F^e(x)$: angenommene theoretische Verteilungsfunktion

Bei Gültigkeit der Nullhypothese ist dann zu erwarten, dass die beobachteten absoluten Abweichungen der theoretischen von der empirischen Verteilungsfunktion für jeden Wert von X sehr gering sein werden. Die beobachtete maximale absolute Abweichung stellt die Testgröße des Tests dar:

$$D = \max_x \left| F^e(x) - F^0(x) \right| = \max\{ d^+ ; d^- \}$$

mit

$$d^+ = \max_x \left| F^e(x_i) - F^0(x_i) \right|$$

$$d^- = \max_x \left| F^e(x_i) - F^0(x_{i-1}) \right|$$

Verteilungsfreier Test

Kolmogorov und Smirnov haben nun gezeigt, dass die Verteilung dieser Testgröße nicht von der speziellen angenommenen theoretischen Verteilung abhängt, sondern für alle stetigen Verteilungen dieselbe ist. Es handelt sich also um einen verteilungsfreien Test. Die Verteilung von D ist allein vom Stichprobenumfang n abhängig und liegt in tabellierter Form vor. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn der Wert D der Prüfgröße größer ist als der tabelliert vorliegende so genannte kritische Wert $d_{\alpha,n}$.

Konservativer Test

Bedingung für die Anwendung des Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstests ist, dass die theoretische Verteilung mit ihren Parametern vollständig bekannt ist. Werden die Parameter der Verteilungsfunktion $F^e(x)$ aus der Stichprobe geschätzt, lässt sich zeigen, dass das tatsächliche Signifikanzniveau des Tests zahlenmäßig kleiner ist als das dem tabellierten kritischen Wert d_α der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung entsprechende (so genannter konservativer Test).

Der Kolmogorov-Smirnov-Test ist auch auf diskrete theoretische Verteilungen anwendbar. Verwendet man die kritischen Werte der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung, so führt der Test zu konservativen Ergebnissen.

Beispiel

Wiederum soll das Beispiel der Umsatzwachstumsabweichungen betrachtet werden.

Basis sind analog zum χ^2-Anpassungstest die Abweichungen des Umsatzwachstums vom beobachteten Mittelwert des Umsatzwachstums.

Umsatzwachstum in der Vergangenheit										
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz		–0,51%	0,43%	0,35%	–0,19%	0,21%	–0,31%	0,08%	–0,83%	0,80%
Periode	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
Umsatz	1,49%	–1,74%	0,55%	–0,29%	0,03%	–0,03%	0,94%	–1,17%	–0,53%	0,72%
Periode	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Umsatz	–0,32%	0,24%	–0,13%	0,40%	–0,81%	0,27%	0,19%	0,12%	0,06%	–0,01%

Es liegen somit 29 beobachtete Werte vor.

Untersucht werden soll nun die Nullhypothese H_0, dass die Abweichungen vom erwarteten Umsatzwachstum normalverteilt sind. Das Signifikanzniveau wird auf 5 % festgelegt. Die Parameter der Normalverteilung – der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ – sind dabei aus den beobachteten Werten zu schätzen.

Es ergibt sich $\mu = 0{,}00\%$ und $\sigma = 0{,}65\%$.

Bestimmt werden muss nun zunächst die **Summenhäufigkeitsfunktion der beobachteten Werte**. Dazu werden diese der Größe nach geordnet. Die Verteilungsfunktion $F^e(x)$ der Normalverteilung (NV) mit $\mu = 0{,}00\%$ und $\sigma = 0{,}65\%$ lässt sich mithilfe einer Tabelle der Standardnormalverteilung (SNV) berechnen.

$$F^{e}_{NV}(x/0;\,0{,}65\%) = F^{e}_{SNV}\left(\frac{x}{0{,}65\%}\right)$$

Hiermit lassen sich zu den beobachteten Werten die theoretisch erwarteten kumulierten Wahrscheinlichkeiten ermitteln.

Ermittlung Prüfgröße Kolmogorv-Smirnov-Anpassungstest										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
beobachtete Werte	–1,74 %	–1,17 %	–0,83 %	–0,81 %	–0,53 %	–0,51 %	–0,32 %	–0,31 %	–0,29 %	–0,19 %
Summenhäufigkeit	3,45 %	6,90 %	10,34 %	13,79 %	17,24 %	20,69 %	24,14 %	27,59 %	31,03 %	34,48 %
Verteilungsfunktion	0,38 %	3,57 %	10,21 %	10,60 %	20,60 %	21,77 %	31,13 %	31,96 %	33,04 %	38,33 %
Abweichung 1 (d–)	0,38 %	0,12 %	3,31 %	0,26 %	6,81 %	4,53 %	10,44 %	7,82 %	5,45 %	7,30 %
Abweichung 2 (d+)	3,07 %	3,33 %	0,14 %	3,19 %	3,36 %	1,08 %	6,99 %	4,37 %	2,00 %	3,85 %
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
beobachtete Werte	–0,13 %	–0,03 %	–0,01 %	0,03 %	0,06 %	0,08 %	0,12 %	0,19 %	0,21 %	0,24 %
Summenhäufigkeit	37,93 %	41,38 %	44,83 %	48,28 %	51,72 %	55,17 %	58,62 %	62,07 %	65,52 %	68,97 %
Verteilungsfunktion	42,26 %	47,88 %	49,50 %	51,72 %	53,42 %	54,76 %	57,51 %	61,73 %	62,45 %	64,60 %
Abweichung 1 (d–)	7,78 %	9,95 %	8,12 %	6,89 %	5,14 %	3,04 %	2,34 %	3,11 %	0,38 %	0,92 %
Abweichung 2 (d+)	4,33 %	6,50 %	4,67 %	3,44 %	1,69 %	0,41 %	1,11 %	0,34 %	3,07 %	4,37 %
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
beobachtete Werte	0,27 %	0,35 %	0,40 %	0,43 %	0,55 %	0,72 %	0,80 %	0,94 %	1,49 %	
Summenhäufigkeit	72,41 %	75,86 %	79,31 %	82,76 %	86,21 %	89,66 %	93,10 %	96,55 %	100,0 %	
Verteilungsfunktion	66,04 %	70,38 %	72,97 %	74,68 %	79,86 %	86,46 %	88,95 %	92,54 %	98,90 %	
Abweichung 1 (d–)	2,92 %	2,03 %	2,89 %	4,63 %	2,90 %	0,25 %	0,70 %	0,56 %	2,34 %	
Abweichung 2 (d+)	6,37 %	5,48 %	6,34 %	8,08 %	6,35 %	3,20 %	4,15 %	4,01 %	1,105 %	

Die beobachtete maximale absolute Abweichung der beobachteten Werte von den theoretisch erwarteten Werten und damit die Prüfgröße D ergibt sich also zu 10,44 %.

Der **kritische Bereich** beziehungsweise die kritische Grenze für den Kolmogorov-Smirnov-Test liegen in tabellierter Form für verschiedene Signifikanzniveaus α und Stichprobenumfänge n vor.

Für $\alpha = 5$ % und Stichprobenumfänge n = 29 ergibt sich ein kritischer Wert von 24,6 %. Die Prüfgröße D ist also kleiner als der kritische Wert. Damit kann die Nullhypothese, dass die Abweichungen einer Normalverteilung mit μ = 0,00 % und σ = 0,65 % folgen, durch den Kolmogorov-Smirnov-Test mit einem Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden.

Anhang

Anhang 1: χ^2-Verteilung

Die χ^2-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Sie wird bestimmt durch den Parameter n aus der Menge der natürlichen Zahlen. Der Parameter n gibt den Freiheitsgrad der χ^2-Verteilung wieder.

Die χ^2-Verteilung ist die Verteilung der Summe X von n unabhängigen quadrierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z_i:

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$$

Die Funktionswerte der χ^2-Verteilung und ihre Quantile liegen tabelliert vor. Der Erwartungswert der χ^2-Verteilung beträgt n, die Varianz 2n. Für n > 100 ist die Zufallsvariable

X näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = n$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2n}$.

Normalerweise ist mit „χ^2-Verteilung“ die zentrale χ^2-Verteilung gemeint. Wenn die normalverteilten Zufallsvariablen Z_i nicht bezüglich ihres Erwartungswertes μ_i ($i = 1, ..., n$) zentriert sind, erhält man die nichtzentrale χ^2-Verteilung. Sie hat als zweiten Parameter neben n den Nichtzentralitätsparameter:

$$\boxed{\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mu_i .}$$

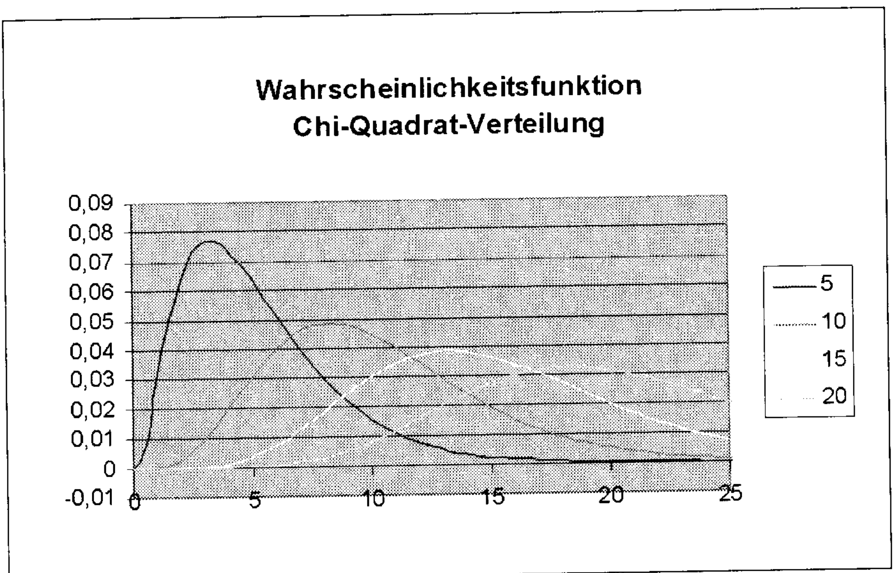

Abb. 2: Wahrscheinlichkeitsfunktion der χ^2-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade

Anhang 2: Student-t-Verteilung

Die Student-t-Verteilung (Studentverteilung, t-Verteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der reellen Zahlen. Sie wird bestimmt durch den Parameter υ aus der Menge der natürlichen Zahlen. Der Parameter υ gibt den Freiheitsgrad der Student-t-Verteilung wieder.

Ist Z eine standardnormalverteilte Zufallsgröße und U eine davon unabhängige χ^2-verteilte Zufallsgröße mit υ Freiheitsgraden, so gehorcht die Zufallsgröße

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{\upsilon}}}}$$

einer Student-t-Verteilung mit υ Freiheitsgraden. Für $\upsilon \geq 30$ kann die Student-t-Verteilung durch die Standardnormalverteilung approximiert werden.

Auch die Student-t-Verteilung liegt in tabellierter Form vor. Für $\upsilon > 1$ beträgt der Erwartungswert der Student-t-Verteilung 0. Für $\upsilon \leq 1$ existiert kein Erwartungswert. Für $\upsilon > 2$ errechnet sich die Varianz der Student-t-Verteilung mittels

$$\boxed{Var(T) = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2}}$$

Für $\upsilon \leq 2$ existiert keine Varianz.

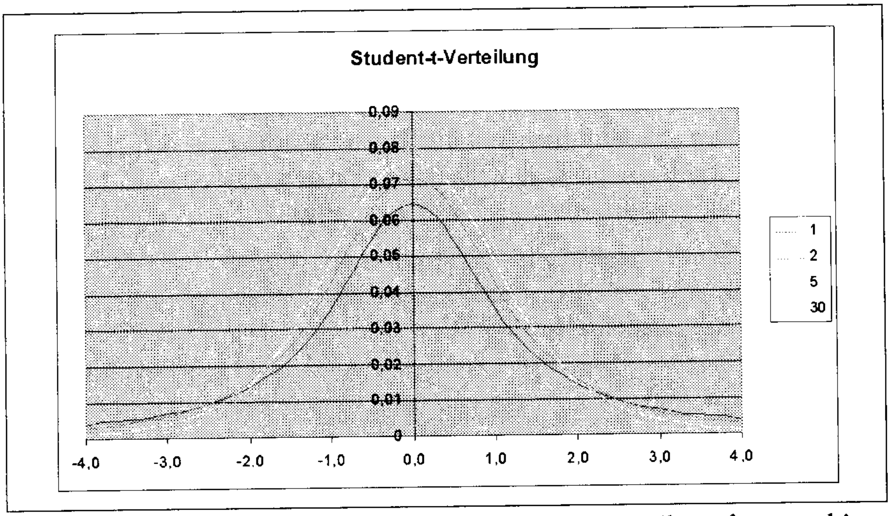

Abb. 3: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Student-t-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade

Anhang 3: Tabelle χ^2-Verteilung

Die folgende Tabelle zeigt Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung nach ausgewählten Wahrscheinlichkeiten p – die einem Signifikanzniveau von 1 – p entsprechen – und Freiheitsgraden n.

χ^2-Verteilung		Signifikanzniveau α										
		0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,500	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
Freiheitsgrad n	1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,4549	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794
	2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	1,3863	4,6052	5,9915	7,3778	9,2104	10,5965
	3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	2,3660	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8381
	4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	3,3567	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8602
	5	0,4118	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	4,3515	9,2363	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
	6	0,6757	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	5,3481	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5475
	7	0,9893	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	6,3458	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
	8	1,3444	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	7,3441	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9549
	9	1,7349	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	8,3428	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893
	10	2,1558	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	9,3418	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1881
	11	2,6032	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	10,3410	17,2750	19,6752	21,9200	24,7250	26,7569
	12	3,0738	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	11,3403	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2997
	13	3,5650	4,1069	5,0087	5,8919	7,0415	12,3398	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8193
	14	4,0747	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	13,3393	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3194
	15	4,6009	5,2294	6,2621	7,2609	8,5468	14,3389	22,3071	24,9958	27,4884	30,5780	32,8015
	16	5,1422	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	15,3385	23,5418	26,2962	28,8453	31,9999	34,2671
	17	5,6973	6,4077	7,5642	8,6718	10,0852	16,3382	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7184
	18	6,2648	7,0149	8,2307	9,3904	10,8649	17,3379	25,9894	28,8693	31,5264	34,8052	37,1564
	19	6,8439	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	18,3376	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5821
	20	7,4338	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	19,3374	28,4120	31,4104	34,1696	37,5663	39,9969
	21	8,0336	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	20,3372	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	41,4009
	22	8,6427	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	21,3370	30,8133	33,9245	36,7807	40,2894	42,7957
	23	9,2604	10,1957	11,6885	13,0905	14,8480	22,3369	32,0069	35,1725	38,0756	41,6383	44,1814
	24	9,8862	10,8563	12,4011	13,8484	15,6587	23,3367	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	45,5584
	25	10,5196	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	24,3366	34,3816	37,6525	40,6465	44,3140	46,9280
	26	11,1602	12,1982	13,8439	15,3792	17,2919	25,3365	35,5632	38,8851	41,9231	45,6416	48,2898
	27	11,8077	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	26,3363	36,7412	40,1133	43,1945	46,9628	49,6450
	28	12,4613	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	27,3362	37,9159	41,3372	44,4608	48,2782	50,9936
	29	13,1211	14,2564	16,0471	17,7084	19,7677	28,3361	39,0875	42,5569	45,7223	49,5878	52,3355
	30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	29,3360	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	53,6719

Anhang 4: Tabelle Kolmogorov-Smirnov-Test

In der folgenden Tabelle sind die kritischen Werte für den Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest für verschiedene Signifikanzniveaus α und Stichprobenumfänge n wiedergegeben. In der letzten Zeile ist der Approximationsfaktor für größere n zu finden. Der kritische Wert berechnet sich dann mittels

$$\boxed{d_{a,\,n} = \frac{Approximationsfaktor_{\alpha}}{\sqrt{n}}}$$

Kolmogorow-Smirnov-Test		Signifikanzniveau α						
		20,0%	10,0%	8,0%	5,0%	4,0%	2,0%	1,0%
Stichprobenumfang n	1	0,900	0,950	0,960	0,975	0,980	0,990	0,995
	2	0,684	0,776	0,800	0,842	0,859	0,900	0,929
	3	0,565	0,636	0,658	0,708	0,729	0,785	0,829
	4	0,493	0,565	0,585	0,624	0,641	0,689	0,734
	5	0,447	0,509	0,527	0,563	0,580	0,627	0,669
	6	0,410	0,468	0,485	0,519	0,534	0,577	0,617
	7	0,381	0,436	0,452	0,483	0,497	0,538	0,576
	8	0,358	0,410	0,425	0,454	0,468	0,507	0,542
	9	0,339	0,387	0,402	0,430	0,443	0,480	0,513
	10	0,323	0,369	0,382	0,409	0,421	0,457	0,489
	11	0,308	0,352	0,365	0,391	0,403	0,437	0,468
	12	0,296	0,338	0,351	0,375	0,387	0,419	0,449
	13	0,285	0,325	0,338	0,361	0,372	0,404	0,432
	14	0,275	0,314	0,326	0,349	0,359	0,390	0,418
	15	0,266	0,304	0,315	0,338	0,348	0,377	0,404
	16	0,258	0,295	0,306	0,327	0,337	0,366	0,392
	17	0,250	0,286	0,297	0,318	0,327	0,355	0,381
	18	0,244	0,279	0,289	0,309	0,319	0,346	0,371
	19	0,237	0,271	0,281	0,301	0,310	0,337	0,361
	20	0,232	0,265	0,275	0,294	0,303	0,329	0,352
	21	0,226	0,259	0,268	0,287	0,296	0,321	0,344
	22	0,221	0,253	0,262	0,281	0,289	0,314	0,337
	23	0,216	0,247	0,257	0,275	0,283	0,307	0,330
	24	0,212	0,242	0,251	0,269	0,277	0,301	0,323
	25	0,208	0,238	0,246	0,264	0,272	0,295	0,317
	26	0,204	0,233	0,242	0,259	0,267	0,290	0,311
	27	0,200	0,229	0,237	0,254	0,262	0,284	0,305
	28	0,197	0,225	0,233	0,250	0,257	0,279	0,300
	29	0,193	0,221	0,229	0,246	0,253	0,275	0,295
	30	0,190	0,218	0,226	0,242	0,249	0,270	0,290
	31	0,187	0,214	0,222	0,238	0,245	0,266	0,285
	32	0,184	0,211	0,219	0,234	0,241	0,262	0,281
	33	0,182	0,208	0,215	0,231	0,238	0,258	0,277
	34	0,179	0,205	0,212	0,227	0,234	0,254	0,273
	35	0,177	0,202	0,209	0,224	0,231	0,251	0,269
	36	0,174	0,199	0,206	0,221	0,228	0,247	0,265
	37	0,172	0,196	0,204	0,218	0,225	0,244	0,262
	38	0,170	0,194	0,201	0,215	0,222	0,241	0,258
	39	0,168	0,191	0,199	0,213	0,219	0,238	0,255
	40	0,165	0,189	0,196	0,210	0,216	0,235	0,252
Approximationsfaktor für n > 40		1,07	1,22	1,27	1,36	1,40	1,52	1,63