Veröffentlicht in

Risikomanagement im Unternehmen
Loseblattwerk (Hrsg. Dr. Werner Gleißner)

2. Aktualisierung, 2001

"Rechnen mit Risiken"

Kapitel 7-3.3, S. 17-31

KOGNOS VERLAG, Augsburg
(www.kognos.de)

Rechnen mit Risiken

Autor: Marco Wolfrum

Inhalt:

Vergangenheitsdaten als Ausgangsbasis

Voraussetzung: unveränderte Rahmenbedingungen

Um Auswirkungen von Risiken – insbesondere im Zusammenspiel mit anderen Risiken – beurteilen zu können, müssen sie quantifiziert werden. Man muss mit ihnen rechnen. Ideale Voraussetzung hierfür ist das Vorliegen von Vergangenheitsdaten. Im Folgenden soll nun aufgezeigt werden, wie man mit Hilfe von bekannten Daten aus der Vergangenheit eine einfache Prognose für die Zukunft erstellt. Es muss dabei vorausgesetzt werden, dass sich die relevanten Rahmenbedingungen nicht geändert haben, man also von der Vergangenheit auf die Zukunft schließen kann. Eine Änderung von Rahmenbedingungen kann beispielsweise der Eintritt eines neuen bedeutenden Wettbewerbers in den relevanten Markt sein.

Beispielhafte Zeitreihe

Betrachtet werden soll im Folgenden das Risiko einer Umsatzabweichung, also die Möglichkeit einer Abweichung vom geplanten Umsatz. In der Vergangenheit ergaben sich folgende Umsätze.

Umsätze in der Vergangenheit										
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz	100	102	105	108	110,5	113,5	116	119	121	125
Periode	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
Umsatz	130	131	135	138	141,5	145	150	152	155	160
Periode	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Umsatz	163,5	168	172	177	180	185	190	195	200	205

Umformung einer Zeitreihe in eine Wachstumszeitreihe

Umrechung in Wachstumsraten

Diese Zeitreihe als Grundlage zur Prognose heranzuziehen, wäre in diesem Fall aber nicht richtig. Zunächst muss untersucht werden, ob dieser Zeitreihe ein so genannter Trend zugrunde liegt, ob also ein regelmäßiger Anstieg der Umsätze zu verzeichnen ist. Bei der Annahme eines linearen Anstiegs – also ein pro Periode konstantes Wachstum – muss man die

Zeitreihe der Umsätze umwandeln in eine Zeitreihe des Umsatzwachstums. Dies wird berechnet durch:

$$Umsatzwachstum = \frac{Umsatz_{Periode}}{Umsatz_{Vorperiode}} - 1$$

Man erhält damit folgende Zeitreihe. Aus Darstellungsgründen werden jeweils nur zwei Nachkommastellen angezeigt. Gerechnet wird jedoch mit dem jeweils exakten Wert.

Umsatzwachstum in der Vergangenheit										
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz		2,00 %	2,94 %	2,86 %	2,31 %	2,71 %	2,20 %	2,59 %	1,68 %	3,31 %
Periode	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
Umsatz	4,00 %	0,77 %	3,05 %	2,22 %	2,54 %	2,47 %	3,45 %	1,33 %	1,97 %	3,23 %
Periode	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
Umsatz	2,19 %	2,75 %	2,38 %	2,91 %	1,69 %	2,78 %	2,70 %	2,63 %	2,56 %	2,50 %

Aufgrund der vorliegenden Informationen sollen nun Aussagen darüber getroffen werden, welcher Umsatz in der nächsten Periode erwartet wird und inwieweit diese Erwartung risikobehaftet ist.

Häufigkeitsverteilungen

Zunächst kann aus den Daten eine so genannte Häufigkeitsverteilung generiert werden. Als absolute Häufigkeit eines Wertes (f) wird die Anzahl des Vorkommens in der Datenreihe definiert. Bei der zugrunde liegenden Zeitreihe ist es nun aber so, dass kein Wert mehr als einmal vorkommt. Man bildet stattdessen so genannte äquidistante (gleich große) Intervalle (Klassen) und bestimmt die absolute Häufigkeit innerhalb der Intervalle. Es sollen im Folgenden Intervalle mit einer Länge von 0,25 % gewählt werden. Teilt man die absoluten Häufigkeiten durch die Gesamtanzahl der vorliegenden Werte (n), erhält man die so genannten relativen Häufigkeiten (h).

Man erhält damit die folgenden Klassen mit den zugehörigen absoluten und relativen Häufigkeiten.

Intervall		f	h
0,50 %	0,75 %	0	0,0 %
0,75 %	1,00 %	1	3,4 %
1,00 %	1,25 %	0	0,0 %
1,25 %	1,50 %	1	3,4 %
1,50 %	1,75 %	2	6,9 %
1,75 %	2,00 %	2	6,9 %
2,00 %	2,25 %	3	10,3 %
2,25 %	2,50 %	3	10,3 %
2,50 %	2,75 %	7	24,1 %
2,75 %	3,00 %	5	17,2 %
3,00 %	3,25 %	2	6,9 %
3,25 %	3,50 %	2	6,9 %
3,50 %	3,75 %	0	0,0 %
3,75 %	4,00 %	1	3,4 %
4,00 %	4,25 %	0	0,0 %
4,25 %	4,50 %	0	0,0 %

Histogramm als Darstellungsform

Mit Hilfe eines so genannten Histogramms werden die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten graphisch dargestellt.

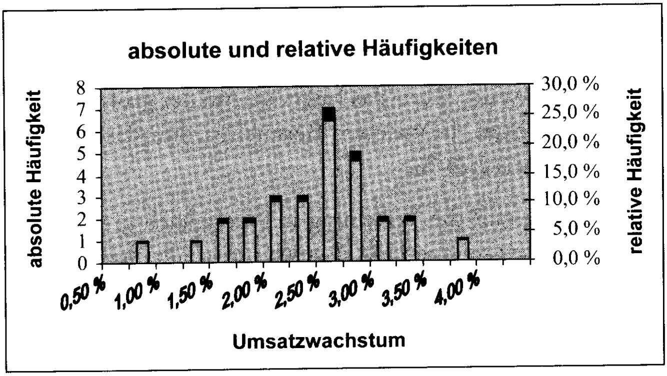

Abb. 6: Absolute und relative Häufigkeiten

Grundgedanke bei der Bestimmung von relativen Häufigkeiten ist, dass diese bei einer genügend großen Anzahl von Vergangenheitsdaten als Näherung für die Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden können. Die Häufigkeitsverteilung wird damit als Wahrscheinlichkeitsverteilung angesehen. Zu bestimmen sind nun Parameter, die diese Verteilung beschreiben. Dabei werden Parameter unterschieden, die etwas über

- die zentrale Tendenz (Lageparameter),
- die Streuung (Streuungsparameter) und
- das Aussehen der Kurve (Formmaßzahlen)

aussagen.

Lageparameter

Zentrale Tendenz

Die Lageparameter sollen etwas über die zentrale Tendenz einer unsicheren Größe aussagen. Wo befindet sich also die Masse der vorliegenden Vergangenheitsdaten, welcher Wert wird erwartet oder welcher hat die größte Wahrscheinlichkeit?

Modus

Der Modus ist der Wert (das Intervall) mit der größten absoluten Häufigkeit. In unserem Beispiel ist dies das Intervall von 2,50 % bis 2,75 %.

Median

Der Median teilt die Verteilung in zwei gleich große Teile. Das heißt, sowohl oberhalb als auch unterhalb dieses Wertes liegen genau 50 % der Vergangenheitsdaten. Der Median des Umsatzwachstums liegt bei 2,56 %.

Mittelwert

Der Mittelwert $\bar{x}$ als der erwartete Wert berechnet sich als arithmetisches Mittel der Datenreihe $(x_1, ..., x_n)$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Für das Umsatzwachstum berechnet sich der Mittelwert mittels:

$$\begin{aligned}\bar{x} = \; & (2{,}00\,\% + 2{,}94\,\% + 2{,}86\,\% + 2{,}31\,\% + 2{,}71\,\% + \\ & 2{,}20\,\% + 2{,}59\,\% + 1{,}68\,\% + \\ & + 3{,}31\,\% + 4{,}00\,\% + 0{,}77\,\% + 3{,}05\,\% + 2{,}22\,\% \\ & + 2{,}54\,\% + 2{,}47\,\% + 3{,}45\,\% + \\ & + 1{,}33\,\% + 1{,}97\,\% + 3{,}23\,\% + 2{,}19\,\% + 2{,}75\,\% \\ & + 2{,}38\,\% + 2{,}91\,\% + 1{,}69\,\% + \\ & + 2{,}75\,\% + 2{,}70\,\% + 2{,}63\,\% + 2{,}56\,\% + 2{,}50\,\%) \\ & /\, 29 \\ & = 2{,}51\,\%\end{aligned}$$

Der Mittelwert des Umsatzwachstums liegt also bei 2,51 %. Diesen Wert sollte man bei einer so genannten erwartungstreuen Planung zu Grunde legen. Der Planumsatz der nächsten Periode berechnet sich durch Multiplikation dieses erwarteten Wachstums mit dem Umsatz der letzten Periode, also

$$\boxed{205 \times (1 + 2{,}51\ \%) = 210{,}14}$$

Streuungsparameter

Abweichungen von dem geplanten Wert

Dieser erwartete Wert wird aber normalerweise nicht exakt eintreten. Durch zufällige Störungen, wie beispielsweise einer unerwarteten Preis- oder Nachfrageschwankung (Risikofaktoren), wird es zu Abweichungen von dem geplanten Wert kommen. Aus der Häufigkeitsverteilung lassen sich nun auch Aussagen darüber treffen, in welchen Bandbreiten sich das Umsatzwachstum bewegen wird. Hierzu dienen die so genannten Streuungsparameter.

Spannweite

Die Spannweite (Variationsbreite) ist die Bandbreite, in der sich die Größe in der Vergangenheit bewegt hat. Sie wird berechnet als Differenz aus maximalem Wert abzüglich des minimalen Werts. Damit ist diese Kennzahl aber stark von so genannten Ausreißern betroffen. Besser geeignet, die Streuung um den erwarteten Wert zu klassifizieren, ist die Varianz oder die Standardabweichung.

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz (s^2) ist die mittlere quadratische Abweichung der Daten von dem Mittelwert.[6]

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\begin{aligned} s^2 = {} & ((2{,}00\ \% + 2{,}51\ \%)^2 + (2{,}94\ \% - 2{,}51\ \%)^2 + \ldots + \\ & (2{,}50\ \% + 2{,}51\ \%)^2)\ /\ 29 \\ & = ((-0{,}51\ \%)^2 + (0{,}43\ \%)^{2\, + \cdots +}(-0{,}01\ \%)^2)\ /\ 29 = \\ & = (0{,}0026\ \% + 0{,}0019\ \% + \ldots + 0{,}0000\ \%)^2\ /\ 29 = \\ & = 0{,}0041\ \% \end{aligned}$$

Zieht man die Wurzel aus der Varianz, erhält man die Standardabweichung (s).

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

Die Varianz der Beispiel-Datenreihe berechnet sich also zu 0,0041 % und die Standardabweichung zu 0,64 %.

---

[6] Bisweilen wird in der Literatur auch die Formel

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

verwendet. Insbesondere bei vielen vorhandenen Datensätzen sind die Abweichungen der Ergebnisse relativ gering. Für das Zahlenbeispiel ergeben sich die Varianz bzw. die Standardabweichung zu 0,0042 % bzw. 0,65 %.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable

Wie oben bereits ausgeführt, lässt sich eine Häufigkeitsverteilung einer Variablen X bei einer genügend großen Anzahl von Beobachtungswerten als Näherung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auffassen. Als Verteilungsfunktion F(x) einer Zufallsvariable X bezeichnet man die Funktion

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}$$

Der Wert einer Verteilungsfunktion an einer Stelle x' ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner als x' annimmt.

Diskrete und stetige Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X heißt diskret, wenn sie nur endlich viele Werte $(x_1,\ldots,x_n)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ annehmen kann.

Stetige Zufallsgrößen können unendlich viele Werte annehmen. Die Verteilungsfunktion lässt sich dann in folgender Form angeben

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

Die Funktion f(x) heißt dabei die Dichte der Verteilung.

Wichtige Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Wichtige Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind

- die Binominalverteilung,
- die hypergeometrische Verteilung,

- die Poissonverteilung,
- die Gleichverteilung,
- die Normalverteilung,
- die Log-Normalverteilung sowie
- die Extremwertverteilung.

Dabei sind die drei Erstgenannten diskrete und die übrigen stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Im Folgenden soll die wichtigste Verteilung näher betrachtet werden: die Normalverteilung.

Normalverteilung

Bedeutung in der Praxis

In der Praxis kommt eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung häufig vor: die so genannte Normalverteilung. Ihr kommt aufgrund des so genannten zentralen Grenzwertsatzes eine große Bedeutung zu. Dieser besagt, dass, wenn eine Zufallsvariable als Summe einer großen Anzahl voneinander unabhängiger Summanden aufgefasst werden kann, von denen jeder zur Summe nur einen unbedeutenden Beitrag liefert, diese Zufallsvariable annähernd normal verteilt ist. Hat ein Unternehmen beispielsweise eine Vielzahl von etwa gleichbedeutenden Kunden, deren Kaufverhalten nicht voneinander abhängig ist, kann man annehmen, dass (Mengen-) Abweichungen vom geplanten Umsatz annähernd normalverteilt sein werden. Es ist in einem solchen Fall also unnötig, jeden Kunden einzeln zu betrachten, sondern es kann der Gesamtumsatz analysiert werden.

Definition

Die Dichte der Normalverteilung (oder Gaußverteilung) mit den Parametern μ und σ (man schreibt dann $N(\mu; \sigma)$) hat folgende Gestalt.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-(0,5) \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

μ stellt dabei den Erwartungswert und σ die Standardabweichung dar. Ist der Erwartungswert gleich null und die Standardabweichung gleich eins, so nennt man dies die Standard-Normalverteilung (N(0; 1)). Graphisch stellt sich diese wie folgt dar.

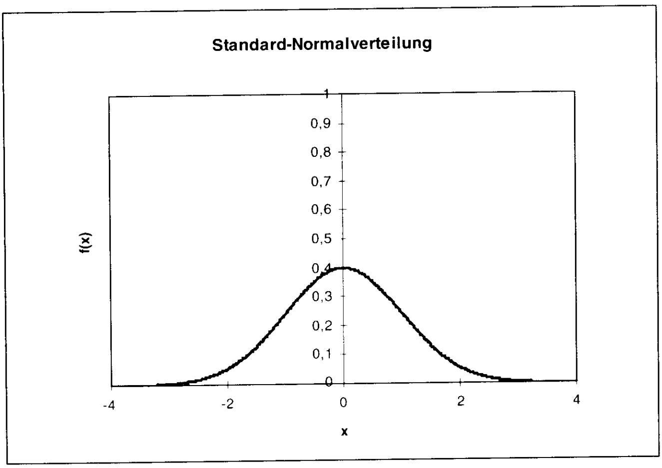

Abb. 7: Standard-Normalverteilung

Eigenschaften

Aufgrund ihres Aussehens wird die Normalverteilung auch (Gaußsche) Glockenkurve genannt. Sie besitzt folgende Eigenschaft:

- ca. 68 % aller Beobachtungswerte liegen im Bereich von $\mu \pm 1 \times \sigma$

- ca. 95,5 % aller Beobachtungswerte liegen im Bereich von $\mu \pm 2 \times \sigma$
- ca. 99 % aller Beobachtungswerte liegen im Bereich von $\mu \pm 3 \times \sigma$

Formmaßzahlen

Vergleich Häufigkeitsverteilung/ Normalverteilung

Lage- und Streuungsparameter liefern keine Informationen über die äußere Gestalt einer Häufigkeitsverteilung. Hierzu verwendet man die so genannten Formmaßzahlen. Diese vergleichen eine Häufigkeitsverteilung mit der Normalverteilung. Die wichtigsten Kennzahlen sind dabei die Schiefe und die Wölbung.

Schiefe

Bei der **Schiefe** γ_1 wird geprüft, ob eine Verteilung verglichen mit der Normalverteilung nach links oder rechts verzogen ist. Sie wird berechnet mittels:

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}}$$

Bei linksschiefen (rechtssteilen) Verteilungen ist $\gamma_1 < 0$.

Bei rechtsschiefen (linkssteilen) Verteilungen ist $\gamma_1 > 0$.

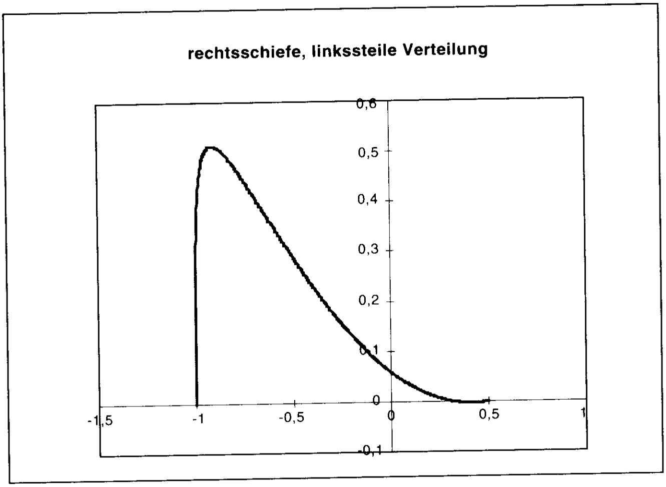

Abb. 8: Rechtsschiefe, linkssteile Verteilung

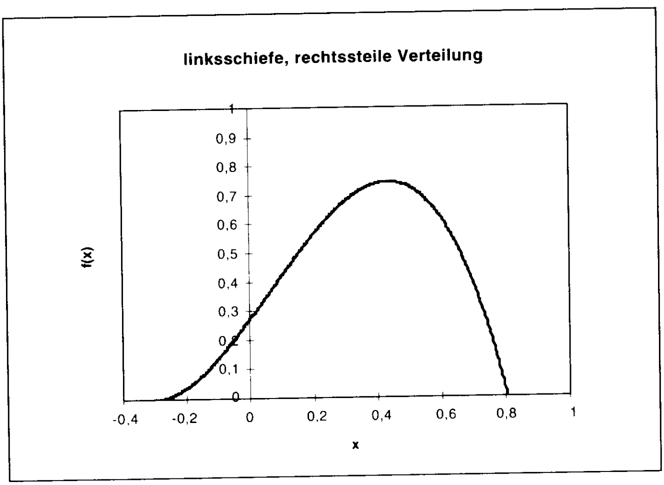

Abb. 9: Linksschiefe, rechtssteile Verteilung

Wölbung

Bei der Wölbung (Kurtosis, Exzess) γ_2 wird geprüft, ob eine (eingipflige) Verteilung verglichen mit der Normalverteilung flacher oder steiler ist. Sie wird berechnet mittels:

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

Bei flacheren Verteilungen ist $\gamma_2 < 3$.

Bei steileren Verteilungen ist $\gamma_2 > 3$.

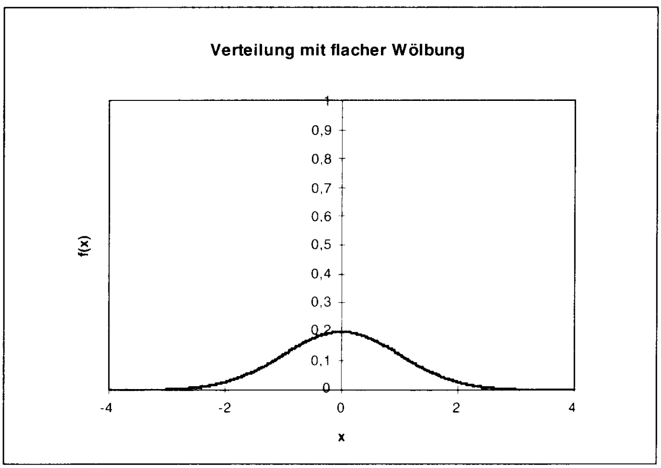

Abb. 10: Verteilung mit flacher Wölbung

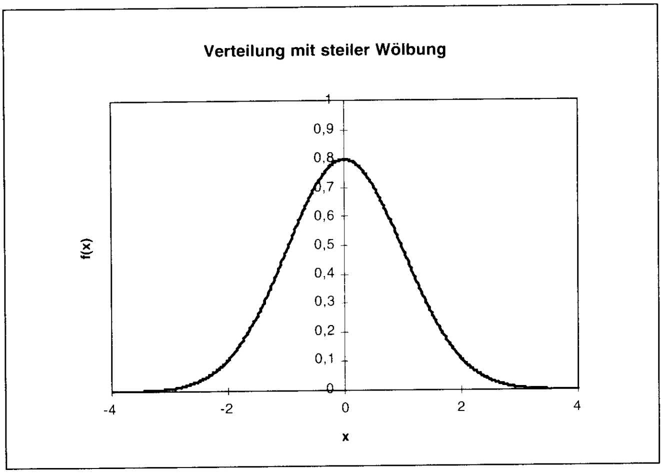

Abb. 11: Verteilung mit steiler Wölbung

Bezogen auf obiges Beispiel zu einer Zeitreihe des Umsatzwachstums ergeben sich folgenden Werte:

$$\gamma_1 = -0,41$$

$$\gamma_2 = 1,24$$

Es handelt sich also um eine linksschiefe Verteilung mit einer flachen Wölbung.